ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS 1982

Mathématiques 1re épreuve (4 h)
— Option Économique —

Exercice I

p et q étant deux entiers positifs ou nuls, on pose

$$B(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q \, dt$$

1°) Comparer $B(p,q)$ et $B(q,p)$.

2°) Etablir la relation $B(p,q) = \frac{p}{q+1} B(p-1,q+1)$, $(p \geqslant 1)$

3°) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $B(0,n)$. En déduire $B(p,q)$.

Exercice II

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices carrées A, d'ordre 2, à coefficients réels, satisfaisant à la relation

$$A^2-3A+2I=0 \quad \text{où} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La base $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ étant donnée, on appelle endomorphisme associé à la matrice A l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice, relativement à la base $\mathcal{B}$ est A.

1°) Montrer que si $A \in \mathcal{A}$, toute matrice semblable à A appartient à $\mathcal{A}$.

2°) Montrer que les valeurs propres des endomorphismes associés aux matrices de $\mathcal{A}$ appartiennent à l'ensemble $\{1,2\}$.

3°) A appartenant à $\mathcal{A}$ on suppose que son endomorphisme associé admet la valeur propre double α.
Démontrer que A est semblable à une matrice B du type

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Prouver que $\beta = 0$. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{A}$ dont l'endomorphisme associé admet une valeur propre double.

Exercice III

Deux joueurs A et B jouent avec un dé parfait. A commence et lance le dé une fois. S'il obtient 1 ou 2, il a gagné et la partie s'arrête. Sinon B joue.
B lance le dé une fois : s'il obtient 3, 4 ou 5 il a gagné et la partie s'arrête. Sinon c'est à A de jouer .... etc.

1°) soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer les probabilités des événements

A_{2k-1} : "A gagne au $(2k-1)^{\text{ème}}$ lancer du dé"

B_{2k} : "B gagne au $(2k)^{\text{ème}}$ lancer du dé".

2°) Quelles sont les probabilités des événements

G_A : "A gagne"

G_B : "B gagne"

.../...

H : "la partie ne s'arrête jamais".

3°) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de lancers effectués durant la partie.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Soit x un réel, élément de $[0,1[$. Etablir la relation

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1} = \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2} \quad , (n \geqslant 1).$$

En déduire la somme de la série de terme général

$$nx^{n-1} \quad (n \geqslant 1).$$

c) Déterminer E(X).

4°) Soit F la fonction de répartition de X. Quelles sont les valeurs de F(2k-1), F(2k) $(k \in \mathbb{N}^*)$?
Comment faut-il choisir n pour que l'événement "la partie comporte au plus n lancers" ait une probabilité $\geqslant 0{,}995$?

Exercice IV

Calculer $\displaystyle\int_2^{2+\sqrt{2}} e^{-x^2+4x-2}\, dx$

Le résultat sera fourni avec 2 chiffres après la virgule.

Valeur de la fonction de répartition de la loi normale réduite $\Phi(x) = \Phi(x; 0; 1)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

x	Φ (x)	x	Φ (x)	x	Φ (x)
0,00	0,500000	1,00	0,841345	2,00	0,977250
0,05	0,519939	1,05	0,853141	2,05	0,979818
0,10	0,539828	1,10	0,864334	2,10	0,982136
0,15	0,559618	1,15	0,874928	2,15	0,984222
0,20	0,579260	1,20	0,884930	2,20	0,986097
0,25	0,589706	1,25	0,894350	2,25	0,987776
0,30	0,617911	1,30	0,903200	2,30	0,989276
0,35	0,636831	1,35	0,911492	2,35	0,990613
0,40	0,655422	1,40	0,919243	2,40	0,991802
0,45	0,673645	1,45	0,926471	2,45	0,992857
0,50	0,691463	1,50	0,933193	2,50	0,993790
0,55	0,708840	1,55	0,939429	2,55	0,994614
0,60	0,725747	1,60	0,945201	2,60	0,995339
0,65	0,742154	1,65	0,950528	2,65	0,995975
0,70	0,758036	1,70	0,955434	2,70	0,996533
0,75	0,773373	1,75	0,959941	2,75	0,997445
0,80	0,788145	1,80	0,964070	2,80	0,997445
0,85	0,802338	1,85	0,967843	2,85	0,997814
0,90	0,815940	1,90	0,971283	2,90	0,998134
0,95	0,828944	1,95	0,974412	2,95	0,998411
				3,00	0,998650

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail